

## 8 класс.

1 (2 балла). В группе подготовки к космическому полёту среди 10 космонавтов был проведён турнир по настольному теннису. Перед турниром каждый космонавт сделал предположение, какое место он займёт по окончании турнира. Николай предположил, что он займёт последнее место. После турнира выяснилось, что каждый космонавт, кроме, разумеется, Николая, занял место хуже, чем предполагал. Какое место мог занять Николай?

2 (3 балла). Два велосипедиста А и Б выехали навстречу друг другу из посёлков В и Г. Они встретились, когда А проехал 10 км и ещё четверть оставшегося ему до посёлка Г пути, а Б проехал 20 км и ещё треть оставшегося ему до посёлка В пути. Найдите расстояние между посёлками В и Г.

3 (4 балла). На базаре у менялы можно обменять три песо на один риал и один тугрик, и можно обменять три риала на два песо и один тугрик. Можно ли обменять 70 песо на 40 тугриков?

4 (5 баллов). На сторонах АВ, ВС, СА треугольника ABC выбраны соответственно точки К, L, М так, что АКLM – параллелограмм. Прямые KM и BC пересекаются в точке Р. Оказалось, что  $KM = MP$ . Найдите отношение  $BL : LC$ .

5 (5 баллов). При подготовке к космическому полёту космонавты провели шахматный турнир: каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков. Победитель турнира одержал победы во всех партиях и набрал в 5 раз меньше очков, чем все остальные вместе. Сколько космонавтов приняли участие в турнире?

6 (6 баллов). Петя для каждого трёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, записал сумму двух его цифр: наибольшей и наименьшей (например, для числа 272 эта сумма равна  $7 + 2 = 9$ ). А Коля вычислил сумму всех чисел, выписанных Петей. Какой результат он получил?

## 9 класс.

1 (2 балла). Найдите наибольшее десятизначное число, все цифры которого различны, и которое делится на 4.

2 (3 балла). У Кати в кошельке были 5 и 10 рублевые монеты. Когда Катя купила мороженое стоимостью 90 рублей, у неё осталось в два раза меньше пятирублёвых монет и в три раза меньше десятирублёвых монет, чем было вначале. Оказалось, что на оставшиеся деньги Катя сможет купить ещё 80-рублёвое мороженое (и возможно у неё останутся монеты). Сколько десятирублёвых монет было в кошельке Кати изначально?

3 (4 балла). Два различных положительных числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ . Докажите, что  $ab = 1$ .

4 (5 баллов). В прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности равноудалён от вершины прямого угла и середины гипотенузы. Чему равен наименьший угол такого треугольника?

5 (5 баллов). Сумма трёх целых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равна 1. Докажите, что число  $(a + bc)(b + ac)(c + ab)$  является точным квадратом.

6 (6 баллов). В группе подготовки космонавтов был проведён шахматный турнир, в котором приняли участие 20 космонавтов. Каждый сыграл с каждым одну партию. За победу в партии начисляется 1 очко, за ничью – 0,5, за поражение – 0 очков. После подведения итогов оказалось, что космонавт А единолично занял 19 место, набрав 9,5 очков. Также в турнире оказался единоличный победитель, набравший больше всех очков. Определите, сколько очков набрал каждый участник турнира.

## 10 класс.

- 1 (2 балла). При проведении самостоятельных работ в параллели 10 класса были распечатаны одинаковые листы, на каждом из которых было напечатано несколько одинаковых условий. Затем каждый лист по отдельности разрезали для индивидуальной выдачи условий учащимся. Всего был сделан 121 разрез. Сколько экземпляров самостоятельной работы могло быть подготовлено?
- 2 (3 балла). На доске были записаны три ненулевых числа. Петя умножил первое из них на  $\frac{5}{4}$ , второе – на  $\frac{8}{7}$ , третье – на  $\frac{3}{5}$ , и из полученного третьего числа вычел 1, и записал результаты в свою тетрадь. Оказалось, что тройка чисел, записанных в тетради, совпадает с тройкой чисел на доске. Найдите третье число, написанное в тетради Пети.
- 3 (4 балла). Играя с компьютером, Сергей выиграл 60% партий. Отдохнув, он выиграл ещё 10 партий подряд, и процент выигранных партий достиг 70%. Сколько партий он сыграл? Какое наименьшее количество партий Сергей должен ещё сыграть, и сколько из них выиграть, чтобы в итоге количество выигранных партий вновь стало равным 60%?
- 4 (5 баллов). На медиане  $AM$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $N$  так, что  $BN = AC$ . Докажите, что прямая  $BN$  отсекает от угла  $CAM$  равнобедренный треугольник.
- 5 (5 баллов). Может ли квадрат целого числа быть суммой квадратов двух простых чисел?
- 6 (6 баллов). Пять космонавтов во время подготовки к полёту играли парами в настольный теннис так, что каждые два космонавта сыграли с каждой другой парой ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Известно, что космонавт  $A$  проиграл ровно 12 раз, космонавт  $B$  проиграл ровно 6 раз. Сколько раз выиграл космонавт  $B$ ?

## 11 класс.

1 (2 балла). Известно, что число  $a$  является корнем уравнения  $x^3 + 7x - 9 = 0$ . Какие значения может принимать выражение  $\frac{2a^3+3a}{11a-18}$  ?

2 (3 балла). Петя с отцом могут за день напилить 5 полениц дров, либо наколоть 8 таких полениц. Какое наибольшее количество полениц они могут напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день? (Ответом не обязательно должно быть целое число).

3 (4 балла). Целые числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab + bc + ca = 1$ . Докажите, что число  $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$  является квадратом натурального числа.

4 (5 баллов). На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $N$  так, что равны углы  $CAN$ ,  $ABL$  и  $CBL$ , где  $BL$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Отрезки  $AN$  и  $BL$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что если  $AP = PN$ , то  $AP \cdot CL = PL \cdot BC$ .

5 (5 баллов). Четыре положительных числа  $A, B, C, D$  образуют в указанном порядке возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что если  $x_1$  – корень уравнения  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ , то  $x_1 < -1$ .

6 (6 баллов). В группе подготовки к космическому полёту 10 космонавтов. Каждый из них назвал имена 5 космонавтов, с которыми он хотел бы полететь в космос. Верно ли, что найдутся два космонавта, назвавших друг друга?